**Université de Strasbourg**
Adriano Marmora, marmora@math.unistra.fr

Master 1 Semestre 1, 2026-2027
**Feuille de TD**

# Algèbre I

## Groupes

**Exercice 1**. Soit $x$, $y$, $z$ des éléments d'un groupe tels que $xyz = 1$. A t-on $yzx = 1$ ? $yxz = 1$ ?

**Exercice 2**. Soit $a$ et $b$ deux éléments d'un groupe. L'équation $ax = b$ a une unique solution.

**Exercice 3**. Soit $G$ un groupe. Soit $(a, b) \mapsto a \circ b$ la loi de multiplication interne définie par $a \circ b = ba$ sur $G$. C'est une structure de groupe. On l'appelle « groupe opposé » à $G$ et on le note parfois $G^{op}$.
Montrer que $G$ et $G^{op}$ sont isomorphes.

**Exercice 4**. Déterminer tous les groupes de cardinal $\leq 6$, leurs sous-groupes, leurs quotients et leurs automorphismes.

**Exercice 5**. Une partie $H$ d'un groupe est dite *stable* si $gh \in H$ pour tous $g$ et $h$ dans $H$. Une partie stable *finie* est un sous-groupe.

**Exercice 6**. Un ensemble *fini* $G$ (non vide) muni d'une loi de composition interne associative $(g, h) \mapsto g * h$ telle que $(\forall x, y, g \in G, gx = gy \Rightarrow x = y)$ et $(\forall x, y, g \in G, xg = yg \Rightarrow x = y)$ est un groupe.
Montrer qu'une seule de ces propriétés ne suffit pas pour avoir la conclusion.

**Exercice 7**. Soit $(G_\alpha)$ une famille de sous-groupes distingués d'un groupe $G$. Si $\cap_\alpha G_\alpha = 1$, alors $G$ est un sous-groupe de $\prod_\alpha G/G_\alpha$.

**Exercice 8**. Soit $G$ le produit direct de deux sous-groupes $A$ et $B$. Si $H$ est un sous-groupe de $G$ contenant $A$, alors $H$ est le produit direct de $A$ et de $H \cap B$.

**Exercice 9**. Soit $H$ un sous-groupe distingué d'un groupe $G$, contenu dans le centre de $G$. Si $G/H$ est monogène, alors $G$ est abélien.

**Exercice 10**. Si tous les éléments d'un groupe $G$ sont d'ordre $\leq 2$, alors $G$ est commutatif. Si $G$ est fini, son ordre est une puissance de 2.

**Exercice 11**. Dans un groupe fini $G$, le nombre des conjugués d'un élément $a \in G$ est égal à l'indice du normalisateur de $a$ et est par suite un diviseur de l'ordre de $G$.

**Exercice 12**. Soit $\Gamma$ le groupe des automorphismes d'un groupe $G$ et $\Delta$ le groupe des automorphismes intérieurs. Alors $\Delta$ est un sous-groupe distingué de $\Gamma$.
Pour qu'un automorphisme $\sigma$ de $G$ soit permutable (ie commute) avec tous les automorphismes intérieurs de $G$, il faut et il suffit que, pour tout $x \in G$, $x^{-1}\sigma(x)$ appartienne au centre de $G$. En déduire que si le centre de $G$ est réduit à l'élément neutre, il en est de même du centralisateur de $\Delta$ dans $\Gamma$.

**Exercice 13**. Soit $G$ un groupe.
Si $H$ est un sous-groupe d'indice $n$, alors l'indice de l'intersection $N$ des conjugués de $H$ est un diviseur de $n!$ (noter que $G/N$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$).
On dit que $G$ est *résiduellement fini* si l'intersection de ces sous-groupes d'indice fini est $\{e\}$. Montrer que ceci équivaut à dire que $G$ est isomorphe à un sous-groupe d'un produit de groupes finis.
On suppose que $G$ peut être engendré par un ensemble fini. Pour tout entier $n$, l'ensemble $P_n$ des sous-groupes d'indice $n$ est alors fini.
Sous cette dernière hypothèse, on considère un endormorphisme $f$ de $G$ qui est surjectif. Pour tout $n$, l'application $H \mapsto f^{-1}(H)$ est alors une bijection de $P_n$. En déduire que le noyau de $f$ est contenu dans tout sous-groupe d'indice fini de $G$. En particulier, si $G$ est résiduellement fini, $f$ est bijectif.

**Exercice 14**. Soit $p$ un nombre premier. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a alors $n^p = n \mod p$.
Soit $x$ et $y$ deux éléments d'un groupe $G$ tels que $yxy^{-1} = x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ et $x^p = 1$. Alors $y^p x y^{-p} = x^n$ et $y^{p-1}$ commute à $x$.
Si, dans un groupe $G$, tous les éléments $\neq 1$ sont d'ordre $p$ et sont conjugués entre eux, alors $G$ est d'ordre 1 ou 2. (Prouvez d'abord que $G$ est commuatif en utilisant la question précédente).

**Exercice 15**. Les éléments (12)(34), (13)(24) et (14)(23) forment, avec l'élément neutre, un sous-groupe commutatif $H$ de $\mathfrak{A}_4$. Ce groupe est distingué dans $\mathfrak{A}_4$ et dans $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4/H$ est cyclique d'ordre 3.
Le centralisateur de $H$ dans $\mathfrak{S}_4$ est égal à $H$. L'application qui à $s \in \mathfrak{S}_4$ associe l'élément $x \mapsto sxs^{-1}$ de $\mathrm{Aut}(H)$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{S}_4/H$ sur $\mathrm{Aut}(H)$ et ce dernier groupe est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
Soit $K$ un sous-groupe d'ordre 2 de $H$, alors $K$ n'est pas distingué dans $\mathfrak{A}_4$.

**Exercice 16**. Soit $G$ un groupe simple et $H$ un sous-groupe d'indice fini $n > 1$. Alors $G$ est fini d'ordre divisant $n!$ et $G$ est commutatif si $n \leq 4$.

**Exercice 17**. Soit $p(n)$ le nombre de classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Ce nombre est égal au nombre des familles $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'entiers $\geq 0$ telles que $\sum_{i=1}^n i x_i = n$. En déduire l'identité $\sum_{n=0}^\infty p(n) T^n = \prod_{m=0}^\infty \frac{1}{1-T^m}$.

**Exercice 18**. Dans un groupe cyclique d'ordre 20, trouver toutes les parties génératrices irréductibles (c'est-à-dire, toute sous-partie stricte engendre un sous-groupe strict) à 2 éléments.

**Exercice 19**. Si une permutation est décomposée en cycles disjoints de longueurs $m_1$, $m_2$, …, $m_k$, alors sont ordre est le plus petit commun multiple des nombres $m_1$, …, $m_k$.

**Exercice 20**. Soit $\alpha$ une permutation écrite comme un produit de cycles (pas nécessairement disjoints) et soit $\beta$ une permutation. Alors $\beta\alpha\beta^{-1}$ est obtenue en remplaçant chaque nombre dans l'écriture en cycles par son image par $\beta$.

**Exercice 21**. Trouver dans le groupe $\mathfrak{S}_n$ tous les éléments permutables au cycle $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_1$, …, $x_n$ est une permutation des nombres 1, 2, …, $n$.

**Exercice 22**. Soit $N$ le normalisateur d'un élément $a$ d'un groupe $G$. Alors le normalisateur de $x^{-1}ax$ est $x^{-1}Nx$. Même question avec le normalisateur et le centralisateur d'une partie.

**Exercice 23**. Soit $G$ un groupe fini, $x \in G$, $k$ le nombre des conjugués de $x$ et $k'$ le nombre des conjugués de $x^n$. Alors $k'$ divise $k$.

**Exercice 24**. Soit, dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, des permutations décomposées en produits de cycles disjoints : $x = (a_{11} \ldots a_{1k_1})(a_{21} \ldots a_{2k_2}) \cdots (a_{p1} \ldots a_{pk_p})$ $(1 < k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_p)$ et $y = (b_{11} \ldots b_{1\ell_1})(b_{21} \ldots b_{2\ell_2}) \cdots (b_{q1} \ldots b_{q\ell_q})$ $(1 < \ell_1 \leq \ell_2 \leq \cdots \leq \ell_q)$. Alors $x$ et $y$ sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si $p = q$ et $k_1 = \ell_1$, $k_2 = \ell_2$, …, $k_p = \ell_p$.

**Exercice 25**. Partitionnez le groupe $\mathfrak{S}_4$ en classes de conjugaison.

**Exercice 26**. Partitionnez le groupe $\mathfrak{A}_4$ en classes de conjugaison. (Comparez le résultat à l'exercice précédent.)

**Exercice 27**. Soit $p$ un nombre premier. Il existe, à isomorphisme près, un unique groupe non cyclique et d'ordre $p^2$. Ce groupe est commutatif.

**Exercice 28**. Quel est le centralisateur de (12) dans $\mathfrak{S}_4$.

**Exercice 29**. Déterminer les sous-groupes d'ordre 4 de $\mathfrak{S}_4$. Lesquels sont distingués ?

**Exercice 30**. Calculer le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe.

**Exercice 31**. Décrire les 2-Sylow de $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.

**Exercice 32**. Décrire un $p$-Sylow de $\mathfrak{S}_p$ ($p$ est premier). Décrire un $p$-Sylow de $\mathfrak{S}_{kp}$ pour $k < p$. Décrire un $p$-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^2}$.

**Exercice 33**. Décrire un $p$-Sylow de $\mathfrak{S}_n$.

**Exercice 34**. Combien d'éléments d'ordre 5 peut contenir un groupe d'ordre 20 ?

**Exercice 35**. Un groupe d'ordre $pq$ ($p$ et $q$ sont premiers) n'est pas simple.

**Exercice 36**. Un groupe d'ordre $p^2q$ ($p$ et $q$ sont premiers) n'est pas simple.

**Exercice 37**. Trouver les 2-Sylow du groupe diédral $D_{10}$.

**Exercice 38**. Soit $H$ un sous-groupe de $G$ dont l'indice $p$ est un nombre premier. Quel peut-être le nombre de conjugués de $H$ ?
On suppose de plus que $p$ est le plus petit diviseur premier de $|G|$, alors le groupe $H$ est distingué.

**Exercice 39**. Soit $G$ un groupe de cardinal $p^r m$ ($p$ premier et ne divise pas $m$). Alors $G$ contient un groupe de cardinal $p^e$ pour tout $e \leq r$.

**Exercice 40**. Soit $G$ un groupe de cardinal $pm$ ($p$ premier et ne divise pas $m$). Soit $S$ un $p$-Sylow de $G$ et soit $X$ l'ensemble des $p$-Sylow de $G$. Quel peut-etre le nombre d'orbites de $S$ dans $X$ ?

**Exercice 41**. Un groupe d'ordre 224 n'est jamais simple.

**Exercice 42**. Soit $G$ un groupe fini et $S$ un $p$-Sylow de $G$. L'indice dans $G$ du normalisateur $N_G(S)$ est congru à 1 modulo $p$.

**Exercice 43**. Soit $G$ un groupe fini, $H$ un sous-groupe distingué de $G$. Soit $z : G \to G/H$ l'application de passage au quotient.

(1) Si $S$ est un $p$-Sylow de $G$, alors $S \cap H$ est un $p$-Sylow de $H$.
(2) Tout $p$-Sylow de $H$ est de la forme $S \cap H$ où $S$ est un $p$-Sylow de $G$.
(3) Si $S$ est un $p$-Sylow de $G$, alors $z(S)$ est un $p$-Sylow de $G/H$.
(4) Tout $p$-Sylow de $G/H$ est de la forme $z(S)$ où $S$ est un $p$-Sylow de $G$.

**Exercice 44**. Soit $G$ un groupe fini, $S$ un $p$-Sylow de $G$ et $H$ un sous-groupe de $G$ contenant $N_G(S)$. Alors $N_G(H) = H$

**Exercice 45**. (Critère pour qu'un groupe soit un produit direct, bon à savoir) Soit $G$ un groupe et $H$, $K$ des sous-groupes de $G$.

— Si $H$ (ou $K$) est distingué, alors le sous-groupe engendré par $H$ et $K$ est égal à $HK$.
— Si $H$ et $K$ sont distingués et si $H \cap K = \{1\}$, alors le sous-groupe $HK$ est isomorphe au produit direct $H \times K$. En particulier si $HK = G$ alors $G$ est isomorphe à $H \times K$.

**Exercice 46**. Il y a exactement (à isomorphisme près) deux groupes d'ordre 6.

**Exercice 47**. Tout groupe d'ordre 15 est cyclique. Il y a (à isomorphisme près) exactement deux groupes d'ordre 21.

**Exercice 48**. Un groupe d'ordre $2p$ ($p$ premier) est cyclique ou diédral.

**Exercice 49**. Soit $G$ un groupe d'ordre 30 et $K$ un 5-Sylow, $H$ un 3-Sylow. Alors $H$ ou $K$ est distingué et $HK$ est cyclique. Trouver tous les groupes d'ordre 30.

**Exercice 50**. Soit $G$ un groupe d'ordre 55. Il existe alors $x$ d'ordre 11 dans $G$ et $y$ d'ordre 5. Il existe $r$ tel que $yxy^{-1} = x^r$. Les restes possibles de $r$ modulo 11 sont 1, 3, 4, 5, 9. Toutes ses valeurs sont possibles et il y a deux groupes d'ordre 55.

**Exercice 51**. Le groupe des quaternions est résoluble.

**Exercice 52**. Si $p$ et $q$ sont premiers, tout groupe d'ordre $pq$ est résoluble.

**Exercice 53**. Un groupe $G$ est résoluble si et seulement si il existe une suite finie décroissante de sous-groupes $H_0 = G \supset H_1 \supset \cdots \supset H_m = \{1\}$ telle que $H_k$ contient les commutateurs de $H_{k-1}$.

**Exercice 54**. Un sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble. Un quotient d'un groupe résoluble est résoluble. Soit $N$ un sous-groupe distingué de $G$. Alors $G$ est résoluble si et seulement si $N$ et $G/N$ le sont.

**Quelques exercices sur les produits semi-directs.**

**Exercice 55**. (à faire au moins une fois dans sa vie) Soit $G$ un groupe, $H$ un sous-groupe distingué et $K$ un sous-groupe. Alors l'action de $K$ par conjugaison sur $G$ induit un homomorphisme $\phi : K \to \mathrm{Aut}(H)$. Alors L'application $H \times K \to G \mid (h,k) \to hk$ est une bijection si et seulement si $H \cap K = \{1\}$ et le groupe engendré par $H$ et $K$ est égal à $G$. En supposant que cette application est bijective, l'ensemble $H \times K$ est ainsi muni d'une loi de groupe ; écrire cette loi en termes des lois de groupes sur $H$ et $K$ et de $\phi$.
Inversement, avec la formule trouvée, étant donné deux groupes $H$ et $K$ et un homomorphisme $\phi : K \to \mathrm{Aut}(H)$, construire une loi de composition interne sur $H \times K$ et montrer que c'est une loi de groupe.

**Exercice 56**. Décrire tous les sous-groupes du groupe $H$ des quaternions. Ils sont tous distingués et $H$ n'est jamais produit semidirect de deux de ses sous-groupes propres.

**Exercice 57**. Décrire les sous-groupes du groupe diédral $D_8$. Lesquels sont distingués ? $D_8$ est-il produit semi-direct de sous-groupes propres ?

**Exercice 58**. Si pour tous $a$ et $b$ dans un groupe $G$ on a $(ab)^2 = a^2b^2$, alors $G$ est commutatif.
Construire, comme produit semi-direct, un groupe d'ordre 27, non commutatif, où tout élément est d'ordre 3 (et en particulier où la relation $(ab)^3 = a^3b^3$ est vérifiée)

**Exercice 59**. Soient $H$ et $K$ deux sous-groupes finis distingués d'un groupe $G$ dont les ordres sont premiers entre eux. Alors $xy = yx$ pour tout $x \in H$ et tout $y \in K$ et $H \times K \simeq HK$. Si $H_1$, ..., $H_r$ sont des sous-groupes distingués dont les ordres sont premiers entre eux deux à deux, alors $H_1 \times \cdots \times H_r \simeq H_1 \cdots H_r$.

**Exercice 60**. Soient $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe distingué de $G$ tel que $G/H$ soit cyclique d'ordre fini $n$. Soit $x$ un élément de $G$ dont l'image $\bar{x}$ dans $G/H$ engendre $G/H$. Soit $\phi$ l'automorphisme $h \mapsto xhx^{-1}$ de $H$ et soit $y = x^n$. Montre que $\phi(y) = y$ et que $\phi^n$ est l'automorphisme intérieur de $H$ défini par $y$.
Soit $\tau$ le morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(H)$ donné par $\tau(m) = \phi^m$ et soit $E = H \rtimes_\tau \mathbb{Z}$ le produit semi-direct correspondant. Montrer que l'élément $(y^{-1}, n)$ de $E$ engendre un sous-groupe central $C_y$ de $E$ et que le quotient $E/C_y$ est isomorphe à $G$.